Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

FICHA SUPLEMENTAR 1

NÚMEROS COMPLEXOS E FUNÇÕES COMPLEXAS

Números Complexos

(1) Descreva as regiões do plano complexo definidas por

$$|z - i| \leq c|z| \ ,$$

onde c é um número real não negativo.

(2) Resolva a equação quadrática

$$z^2 + 2iz + i - 1 = 0 \ .$$

Resolução: *Pela fórmula resolvente para a equação quadrática,*

$$\begin{aligned} z^2 + 2iz + i - 1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad z = -i \pm \sqrt{-i} \\ &\Longleftrightarrow \quad z = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}-2}{2} i \quad \textit{ou} \quad z = \tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}+2}{2} i \end{aligned}$$

$\square$

Comentário: *A fórmula resolvente para a equação quadrática vale para equações com coeficientes complexos. A sua demonstração resume-se a:*

$$az^2 + bz + c = a\left(z - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(z - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \ ,$$

onde $\sqrt{\cdot}$ *e* $-\sqrt{\cdot}$ *representam as duas raízes quadradas de um número complexo.* $\diamondsuit$

(3) Determine todas as soluções $z \in \mathbb{C}$ da equação

$$z^6 = (i+2)^3 + \frac{1 - 28i}{2 - i} \ .$$

Resolução: *Primeiro simplifica-se o lado direito:*

$$(i+2)^3 + \frac{1 - 28i}{2 - i} = i^3 + 6i^2 + 12i + 8 + \frac{30 - 55i}{5} = 8 \ .$$

As soluções da equação são portanto as raízes sextas de 8*, ou seja,*

$$z = \sqrt{2} e^{i\frac{k\pi}{3}} \qquad \textit{com} \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \ .$$

$\square$

(4) Resolva a seguinte equação

$$1 + 3z + 3z^2 + z^3 = 4\sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{2}} \left(e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{-i3\pi}\right) \ .$$

Diferenciabilidade

(5) (a) Seja $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma aplicação linear onde $\mathbb{C}$ é considerado espaço vectorial de dimensão 2 sobre $\mathbb{R}$. Seja $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a matriz que representa T relativamente à base $1, i$ de $\mathbb{C}$, ou seja, $T(x + yi) = (ax + by) + (cx + dy)i$. Mostre que a aplicação T é multiplicação por um número complexo se e só se

$$a = d \qquad \text{e} \qquad b = -c \ .$$

(b) Uma função analítica $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ considerada como uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tem por derivada em cada z_0 uma aplicação linear (a sua *jacobiana*),

$$Df_{z_0} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ .$$

A aplicação Df_{z_0} corresponde à multiplicação por um número complexo, $f'(z_0)$. Qual é esse número em termos das entradas de Df_{z_0}?

Resolução:

(a) *Suponha-se que T é multiplicação por um número complexo, $a + ci$. Então*

$$T(x + yi) = (a + ci)(x + yi) = (ax - cy) + (cx + ay)i \ .$$

Relativamente à base $1, i$ de $\mathbb{C}$, fica

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} ,$$

ou seja, as entradas da diagonal são iguais e as da anti-diagonal são simétricas. Suponha-se, reciprocamente, que, relativamente à base $1, i$ de $\mathbb{C}$, a aplicação linear T é dada por uma matriz

$$\begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix} ,$$

ou seja,

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax - cy \\ cx + ay \end{bmatrix} .$$

Então $T(x+yi) = (ax-cy)+(cx+ay)i = (a+ci)(x+yi)$, pelo que T é multiplicação pelo número complexo $a + ci$.

(b) *Considerando a função complexa de variável complexa*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x + yi & \longmapsto & u(x + yi) + iv(x + yi) \end{array}$$

como uma função vectorial real de duas variáveis reais,

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (u(x, y), v(x, y)) \ , \end{array}$$

a sua jacobiana no ponto (x_0, y_0) correspondente a $z_0 = x_0 + iy_0$ é

$$Df_{z_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} .$$

De acordo com a alínea (a), conclui-se que Df_{z_0} se traduz na multiplicação pelo número complexo

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

(onde $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$).

□

Equações de Cauchy-Riemann

(6) Use as equações de Cauchy-Riemann para decidir sobre a analiticidade das seguintes funções (onde $z = x + yi$):
(a) $f(z) = |z|^2 z = x^3 + xy^2 + (x^2y + y^3)i$;
(b) $f(z) = e^{x^2-y^2}\left(\cos^2(xy) - \frac{1}{2} + i\cos(xy)\sin(xy)\right)$.

(7) Determine o domínio de diferenciabilidade das seguintes funções:
(a) $f(z) = e^{xy} - e^{-xy} + xyi$;
(b) $f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$ (para $z \neq 0$);
onde $x = \mathrm{Re}z$ e $y = \mathrm{Im}z$.

Resolução:
(a) *As equações de Cauchy-Riemann são necessárias para a diferenciabilidade. A função*

$$f(x + iy) = \underbrace{e^{xy} - e^{-xy}}_{u(x,y)} \underbrace{+xy}_{v(x,y)} i$$

não satisfaz as equações de Cauchy-Riemann fora da origem porque:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \iff \begin{cases} ye^{xy} + ye^{-xy} = x \\ -xe^{xy} - xe^{-xy} = y \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} xy(e^{xy} + e^{-xy}) = x^2 \\ xy(e^{xy} + e^{-xy}) = -y^2 \end{cases}$$

$$\implies x^2 = -y^2 \implies x = y = 0$$

Na origem as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas, e na origem f é de facto diferenciável porque

$$\begin{aligned} & \lim_{z\to 0} \tfrac{e^{xy}-e^{-xy}+ixy}{x+iy} \\ = & \lim_{z\to 0} \tfrac{[(e^{xy}-e^{-xy})x+xy^2]+i[x^2y-(e^{xy}-e^{-xy})y]}{x^2+y^2} \\ = & \lim_{z\to 0} \tfrac{2x^2y+xy^2+(\ldots)}{x^2+y^2} + i\lim_{z\to 0} \tfrac{x^2y-2xy^2+(\ldots)}{x^2+y^2} \\ = & 0 \end{aligned}$$

onde $(\ldots)$ representa termos de ordem superior que não contribuem para o limite. Conclui-se que f é diferenciável apenas em 0.

Comentário: *Em alternativa, podia-se invocar o teorema que afirma que, quando as derivadas parciais são contínuas, as equações de Cauchy-Riemann são também uma condição suficiente para a diferenciabilidade; ver, por exemplo, p.26 de* Complex Analysis *por L. Ahlfors. Este resultado é aplicado na alínea seguinte.* ♢

(b) *Quando as partes real e imaginária de uma função complexa são continuamente diferenciáveis, as equações de Cauchy-Riemann são suficientes para a diferenciabilidade. Neste caso a função f tem derivadas contínuas em todo o seu domínio e satisfaz sempre as equações de Cauchy-Riemann:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = & \quad \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} & = \frac{\partial v}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} = & \quad \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & = \frac{\partial v}{\partial x} \ . \end{aligned}$$

Conclui-se que f é diferenciável em todo o seu domínio.

Comentário: *A função dada é igual a $f(z) = \frac{1}{z}$, cuja derivada é $-\frac{1}{z^2}$ para qualquer $z \neq 0$.* ♢

□

(8) Considere a função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy(x + y)$$

(a) Mostre que u é uma função harmónica.
(b) Determine a função harmónica conjugada, v, tal que $v(0, 0) = 0$.

(9) (a) Mostre que, em coordenadas polares, as equações de Cauchy-Riemann se escrevem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} & = & \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} & = & -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta} \end{cases}$$

onde $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$.

(b) Mostre que a função

$$f(z) = 2\log\frac{\rho}{2} + 2i\theta$$

é analítica em todo o seu domínio, $\rho > 0$ e $\theta \in]0, 2\pi[$.

(c) Calcule a derivada, $f'(z)$, da função da alínea anterior em termos de z.

Resolução:

(a) *Se*

$$\begin{cases} x & = & \rho\cos\theta \\ y & = & \rho\sin\theta \end{cases}$$

então

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial x} & \frac{\partial \rho}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{\rho} & \frac{\cos\theta}{\rho} \end{bmatrix} .$$

As equações de Cauchy-Riemann ficam

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}\ . \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{\rho} = \frac{\partial v}{\partial \rho}\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\rho} & (\star) \\ -\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\rho} = \frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\theta - \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{\rho} & (\star\star) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \cos\theta(\star) - \sin\theta(\star\star) \\ \sin\theta(\star) + \cos\theta(\star\star) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\ . \end{cases}$$

(b) *Quando as partes real e imaginária de uma função complexa são continuamente diferenciáveis, as equações de Cauchy-Riemann são suficientes para a diferenciabilidade. Neste caso,*

$$u = \operatorname{Re} f = 2\log\tfrac{\rho}{2}$$
$$v = \operatorname{Im} f = 2\theta$$

e as equações de Cauchy-Riemann são sempre satisfeitas:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{2}{\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} = 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\ . \end{cases}$$

Logo, f é analítica em todo o seu domínio.

(c)

$$\begin{aligned} f'(z) &= \tfrac{\partial u}{\partial x} + i\tfrac{\partial v}{\partial x} \\ &= \left(\tfrac{\partial u}{\partial \rho}\tfrac{\partial \rho}{\partial x} + \tfrac{\partial u}{\partial \theta}\tfrac{\partial \theta}{\partial x}\right) + i\left(\tfrac{\partial v}{\partial \rho}\tfrac{\partial \rho}{\partial x} + \tfrac{\partial v}{\partial \theta}\tfrac{\partial \theta}{\partial x}\right) \\ &= \left(\tfrac{2}{\rho}\cos\theta + 0\right) + i\left(0 - 2\tfrac{\sin\theta}{\rho}\right) \\ &= \tfrac{2\rho\cos\theta - i2\rho\sin\theta}{\rho^2} \\ &= \tfrac{2\bar{z}}{|z|^2} \\ &= \tfrac{2}{z}\ . \end{aligned}$$

Comentário: *A função dada é igual a $f(z) = \log\frac{z^2}{4}$, onde $\log$ representa o ramo principal do logaritmo.* ♢

□

Funções Trigonométricas

(10) Prove que

$$\sin(x+iy) = \sin x \, \cosh y + i \cos x \, \sinh y \ .$$

Resolução:

$$\begin{aligned}
\sin(x+iy) &= \tfrac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i} \\
&= \tfrac{e^{ix-y}-e^{-ix+y}}{2i} \\
\sin x \, \cosh y + i \cos x \, \sinh y &= \tfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \tfrac{e^{y}+e^{-y}}{2} + i \tfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \tfrac{e^{y}-e^{-y}}{2} \\
&= \tfrac{e^{y+ix}-e^{y-ix}+e^{-y+ix}-e^{-y-ix}-e^{y+ix}-e^{y-ix}+e^{-y+ix}+e^{-y-ix}}{4i} \\
&= \tfrac{e^{-y+ix}-e^{y-ix}}{2i}
\end{aligned}$$

□

(11) Mostre que, para $z = x + yi$, se tem

$$|\sin z|^2 = \sinh^2 y + \sin^2 x = \cosh^2 y - \cos^2 x \ .$$

(12) Estabeleça seguinte igualdade (onde $z = x + yi$)

$$|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = \cosh(2y) \ .$$

Exponenciais e Logaritmos

(13) Determine todas as soluções da equação

$$z^{2i} - 2z^i + 2 = 0 \ .$$

Resolução: *Nas equações seguintes, o símbolo* $\operatorname{Log} z$ *representa genericamente os logaritmos de* z.

$$\begin{aligned}
z^{2i} - 2z^i + 2 = 0 &\iff (z^i)^2 - 2z^i + 2 = 0 \\
&\iff z^i = 1 \pm i \\
&\iff i\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}(1 \pm i) \\
&\iff \operatorname{Log} z = \tfrac{1}{i}[\ln|1 \pm i| + i(\arg(1 \pm i) + 2k\pi)] \\
&\iff \operatorname{Log} z = -i \ln \sqrt{2} \pm \tfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\
&\iff z = e^{\pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi - i \ln \sqrt{2}} \ ,
\end{aligned}$$

com $k \in \mathbb{Z}$. □

(14) Se z e w forem números complexos com $z \neq 0$, o símbolo z^w representa o conjunto dos números complexos s que têm logaritmo da forma $w\alpha$, para algum logaritmo α de z. (Ou seja, $e^{w\alpha} = s$ e $e^{\alpha} = z$ para algum número complexo α.) Descreva o conjunto z^w quando $z = 1$ and $w = \frac{1}{3} + i$.

Resolução: *Tem-se que* $1 = e^{2k\pi i}$ *para qualquer* $k \in \mathbb{Z}$*. Consequentemente:*

$$\begin{aligned} 1^{\frac{1}{3}+i} &= e^{(\frac{1}{3}+i)\mathrm{Log}\,1} \\ &= e^{(\frac{1}{3}+i)2k\pi i} \\ &= e^{\frac{2k\pi}{3}i - 2k\pi} \\ &= e^{-2k\pi}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right) \ , \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{Z}$. □